An explicit construction of derived moduli stacks of Harder-Narasimhan filtrations

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
水野　雄貴 (Yuki Mizuno)

1　導入，本レポートについて

■著者について　著者の専門分野は代数幾何学である．代数幾何学は多項式の零点で記述される多様体について研究する分野である．その中でも，著者は代数多様体 (またはスキーム) 上の層のモジュライ空間について研究している．ここで，代数多様体 (またはスキーム) X 上の層とは，X 上の開集合全体からなる圏 ouv(X) から集合の圏 Sets への反変関手である種の張り合わせの条件の成立するもののことを指す．また，X 上の層のモジュライ空間とは代数多様体 (またはその一般化であるスキーム) で各点が X 上の層をパラメトライズしているものを指す．特に著者はベクトル束や連接層のモジュライ空間について研究している，ここで連接層とは，大雑把に言って局所的には有限生成な加群に付随する層として実現される層のことである．

■スタックの動機　一般に X 上の連接層全てをパラメトライズするような代数多様体やスキームは存在しない．もし，モジュライ空間をスキームとして実現する場合，パラメトライズする層を制限する必要がある．この時に制限される層は，(半) 安定層と呼ばれるクラスに属す．一方で，X 上の連接層全てをパラメトライズするようなモジュライ空間を構成する場合， スキームのさらに一般化であるスタックという概念が必要となる．このように構成された層のモジュライ空間をモジュライスタックと呼ぶことにする，

■導来代数幾何学の動機　ここからは，導来代数幾何学と呼ばれるものの動機について簡単に説明する．こうして構成されたモジュライスタックには多様体同様に滑らかさの概念を自然に定義することができる．しかしながら，モジュライスタックをいつも滑らかになるとは限らない，Kontsevich や Deligne, Drinfeld たちは，これらのモジュライ空間はさらに性質の良い (もちろん滑らかな) 幾何学的対象の切り下げとして得られるだろうという哲学を提唱した．これを Hidden Smoothness Philosophy(Principle) という．このような幾何学的対象が導来スキームや導来スタックと言われるものとなる．スキームが位相空間と環の層の組と表される一方で，導来スキームは位相空間と次数付き微分代数の層の組として表される，

著者は，Ciocan-Fontanine, Behrend 等らの手法 ([1]) を用いることにより，Harder-Narasimahan フィルトレーションの導来スタックを構成した．このレポートでは最終的にはその結果について紹介できればと思う．

■本レポートについて　ここまで，非常に大雑把にではあるが，著者の研究分野のモチベーションについて説明した．本レポートでは，代数幾何学が専門でない方を想定して，今まで書いてきた専門用語を含めてできるだけ根本概念から書いていければと思う．このレポートがスタックの概念への入門の手助けとなれば幸いである．そのため，著者の主結果についての説明への比重が少なくなっている．さらに興味を持っていただけた場合はプレプリントを参照していただければ幸いである．

2　代数多様体，スキーム

この章の大部分の定義は [3] を参考にしている．さらに詳細な説明についてはそちら参照せよ．k は以下, 代数閉体とする．

2.1　代数多様体

まずは，スキームの説明に入る前にさらに具体的な代数多様体の定義を行う．

定義 2.1. n 次のアフィン空間 $\mathbb{A}_k^n$(または $\mathbb{A}^n$) とは，$\mathbb{A}_k^n := \{(a_1, \cdots, a_n) | a_i \in k\}$.

定義 2.2 (アフィン代数多様体)**.** $A(\mathbb{A}^n) := k[x_1, \cdots, x_n]$ の部分集合 S に関して，$Z(S) := \{p \in \mathbb{A}^n | f(p) = 0, ^\forall f \in S\}$．この時，$\{Z(S) | S \subset A(\mathbb{A}^n)\}$ は閉集合の公理を満たす，これにより定まる $\mathbb{A}_k^n$ の位相を Zariski 位相という．Zarisiki 位相で閉集合となる $\mathbb{A}^n$ の部分位相空間をアフィン (代数) 多様体という．さらに，2 つの互いを含まない閉集合の和として表されるアフィン多様体を既約という．アフィン多様体 $X \subset \mathbb{A}^n$ に対して，$I(X) := \{fk[x_1, \cdots, x_n] | f(p) = 0, ^\forall p \in X\}$, $A(X) := A(\mathbb{A}^n)/I(X)$．$X \subset \mathbb{A}^n, Y \subset \mathbb{A}^m$ に対して写像 $f : X \to Y$ が X から Y への射であるとは，$f(p) = (f_1(p), \cdots, f_m(p)), (f_i \in A(X))$ となることである，

定義 2.3 (代数多様体)**.** X が代数多様体であるとは， X の有限な開被覆 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ と各 i について同相写像 $\varphi_i : U_i \to V_i$ (ただし，V_i はアフィン多様体) があり，任意の i, j について $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ が局所的にアフィン代数多様体の射となっている．

2.2　スキーム

この節では，今の代数多様体の一般化となる概念であるスキームとその周辺概念を行う．ここで書いたことよりもさらに細かい定義に関しては，[3, Chapter2,3] を見ていただければと思う．

定義 2.4 (層)**.** X を位相空間とする．X 上の前層 F とは，圏 $\mathrm{ouv}(X)$ から　圏 Sets への反変関手のことを言う．二つの前層の射は関手の間の自然変換として定義する．ここで，$\mathrm{ouv}(X)$ は対象を X の開集合全てとし，射は開集合の包含とする．前層 F が層であるとは，以下の 2 つが成り立つことをいう．

- $U \in \mathrm{ouv}(X), s_1, s_2 \in F(U)$，さらに $U = \cup U_i$ を U の開被覆とした時， $s_1|_{U_i} = s_2|_{U_i} (\forall i)$ ならば，$s_1 = s_2$.
- $U, U_i \in \mathrm{ouv}(X)$ を上記のようにとり，$s_i \in F(U_i)$ が $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たす時，$\exists s \in F(U)$ で $s|_{U_i} = s_i$.

定義 2.5. F を位相空間 X 上の層とし，$\varphi : X \to Y$ を位相空間間の連続写像とする．この時，前層 $\varphi_* F$ を $\varphi_* F(V) := F(\varphi^{-1} U)$ として定める．この時，$\varphi_* F$ は Y 上の層を定める．また，$U \subset X$ を開部分集合とした時，U 上の 前層 $F|_U$ を $F|_U(V) := F(V)$ として定める，この前層も実際に層となる．

定義 2.6 (環付き空間)**.** X を位相空間，$\mathcal{O}$ を X 上の層とした時，$\mathcal{O}$ が環の層であるとは $F : \mathrm{ouv}(X) \to \mathrm{Ring} \hookrightarrow \mathrm{Sets}$ と書ける時をいう．また，環付き空間とは位相空間 X と X 上の環の層 $\mathcal{O}$ の組 $(X, \mathcal{O})$ をいう．さらに，$\forall x \in X$ について，$\mathcal{O}_{X,x} := \lim_{U \ni x} \mathcal{O}_X(U)$ が局所環となる時，局所環つき空間という．

定義 2.7. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を環付き空間とした時．その間射 $(f, f^\sharp)(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ とは，連続写像

$f : X \to Y$ と Y 上の環の層の間の射 $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ の組みのことである，さらに，環付き空間たちが局所環付き空間であるとき，$f^\sharp_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ が局所環の準同型となる時，環付き空間の射は局所環付き空間の射という．

定義 2.8 (アフィンスキーム)**.** R を環とした時，R に付随する環付き空間 $(\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec(R)}})$ を以下のように定める．$\mathrm{Spec}(R) := \{\mathfrak{p} \subset R | \mathfrak{p}$ は素イデアル $\}$, $V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}$ とした時，$V(\mathfrak{a})$ 全体は $\mathrm{Spec}(R)$ の閉集合を定める．これにより定まる位相により $\mathrm{Spec}(R)$ を位相空間と見る．また，$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}(U) := \{s : U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_\mathfrak{p} | s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}, s$ は局所的に A の元の商と書ける $\}$ これにより，$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(X)}$ は X 上の環の層となる．

局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ がアフィンスキームであるとは，ある環 R が存在して，局所環付き空間の同型 $(X, \mathcal{O}_X) \simeq (\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec(R)}})$ が存在することである．

定義 2.9 (スキーム)**.** 局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ がスキームであるとは, 任意の点 $x \in X$ に対して $x \in \exists U \subset X$ で　$(U, \mathcal{O}_X|_U)$ がアフィンスキームとなることである．スキームの間の射は局所環つき空間の射として定義する．

定義 2.10. S をスキーム後した時，圏 Sch/S を対象をスキーム X と X から S への射 φ の組みとする．さらに，対象は単に φ で表す．また，$\varphi : X \to S$ から $\psi : Y \to S$ への射はスキームの射 $f : X \to Y$ で $\psi \circ f = \varphi$ を満たすものとする．

2.3　連接層，ベクトル束

本レポートで重要な概念である連接層やベクトル束の概念について説明を行う．

定義 2.11. $(X, \mathcal{O}_X)$ を環つき空間とした時，その上の層 $\mathcal{F}$ が $\mathcal{O}_X$ 加群であるとは，X の各開部分集合 U に関して $\mathcal{F}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$ 加群であり，$V \subset U$ を任意の U の開部分集合として時，制限写像 $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ が可換間の射 $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ と可換になることである．また，$\mathcal{G}$ もその上の $\mathcal{O}_X$ 加群であるとするとき，その間の射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とは層の射であり，各 $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$ 加群の射となることである．

定義 2.12 (局所自由層)**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ 上の $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ が局所自由層であるとは，X の開被覆 $X = \bigcup U_i$ が存在して，$\mathcal{F}|_{U_i}$ が,$\mathcal{O}_{U_i}$ の直和と $\mathcal{O}_{U_i}$ 加群として同型になることを言う．

定義 2.13. $\mathrm{Spec}(A)$ をアフィンスキームとする．M を A 加群とした時，これに付随する $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,A}$ 加群 $\tilde{M}$ を以下でさだめる:

任意の開集合 $U \subset \mathrm{Spec}(A)$ に関して，$\tilde{M}(U) := \{s : U \to \coprod_\mathfrak{p} M_\mathfrak{p} | ^\forall\mathfrak{p} \in U, s(\mathfrak{p}) \in M_\mathfrak{p}$ かつ局所的に $s = \frac{m}{f}(m \in M, f \in A)$ と書ける.$\}$.

定義 2.14. スキーム $(X, \mathcal{O}_X)$ に関してその上の加群 $\mathcal{F}$ があるアフィン開被覆 $X = \bigcup \mathrm{Spec}(A_i)$ に関して $\mathcal{F}|_{\mathrm{Spec}(A_i)} \simeq \tilde{M}_i(\exists M_i \in \mathrm{Mod}(A_i))$ となる時，$\mathcal{F}$ を準連接層といい，その M_i が有限生成 A_i 加群となる時 $\mathcal{F}$ は連接層であると言う．

注意 2.15. スキーム X 上の局所自由層とベクトル束の間には 1 対 1 の対応を作ることができる ([3, Chapter2, Exercise 5.18])．　これにより局所自由層とベクトル束は同一視して扱う．

3　代数空間，スタック

3.1　関手としてのスキーム, 代数空間

スキームは関手として見ることができることについて説明する．

定義 3.1. X をスキームとする．関手

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(-, X) : (\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$$

を $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(Y, X)$ により定める．

この時，$X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(-, X)$ はスキームの圏からスキーム圏から集合の圏への関手の圏 $[(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}]$ への忠実充満な関手を定める．また，$X \simeq Y \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(-, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(-, Y)$ であることから，$\mathrm{Sch}^{\mathrm{op}} \subset [(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}]$ とみなせる．

$F \in [(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}]$ が，$\mathrm{Hom}(-, X) \simeq F$ $(\exists X \in (\mathrm{Sch}))$ となる時，F は表現可能であるという．

代数空間とは，大まかに言えば，$[(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}]$ のなかで，スキームに近いものさらに詳しくは，etale local にスキームが貼り合わさったものとして定義される．代数空間の定義の前に，必要な定義をいくつか述べる．

定義 3.2. $F \in [(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}]$ とした時，F がエタール位相で層であるとは以下が成立することを言う．
${}^{\forall}U, U_i \in \mathrm{Sch}$, $\{\varphi_i : U_i \to U\}$: エタール射の族で $\bigcup_i \mathrm{Im}(\varphi_i) = U$ とする．

- $s, t \in F(U)$ とした時，　$F(\varphi_i)(s) = F(\varphi_i)(t)$ ならば $s = t$.
- $s_i \in F(U_i)$ とし，$F(pr_{ij1})(s_i) = F(pr_{ij2})(s_j)$ ならば，$\exists s \in F(U)$ で $F(\varphi_i)(s) = s_i$ となる．ただし，pr_{ij1}, pr_{ij2} は以下のカルテジアン図式のより定義される．

$$\begin{tikzcd}
U_i \times_U U_j \arrow[r, "pr_{ij2}"] \arrow[d, "pr_{ij1}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U_j \arrow[d, "\varphi_j"] \\
U_i \arrow[r, "\varphi_i"] & U
\end{tikzcd}$$

定義 3.3. $\alpha : F \to G \in \mathrm{Mor}([(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}])$ が表現可能であるとは，任意のスキーム U か G への射 $\beta : U \to G$ に対し，$F \times_{\alpha,G,\beta} U$ がスキームとして表現可能であることである．また，α が全射 (エタール) であるとは，射 $F \times_{\alpha,G,\beta} U \to U$ がエタール射 (全射) となることである．

定義 3.4 (代数空間)**.** $F \in [(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}]$ が代数空間であるとは，以下の条件を満たすことである．

1. F はエタール位相で層となる．
2. 対角射 $F \to F \times F$ は表現可能.
3. あるスキーム U と表現可能な射 $U \to F$ でエタールな全射が存在する．

注意 3.5.
- 上の定義の 3 で表現可能な射の存在を要求しているが，実は 2 の条件からスキームから F への射は全て表現可能であることが導かれる．
- 関手 F がスキームとして表現される必要十分条件は上の代数空間の定義のエタール射を開埋め込みに置き換えた条件として書くことができる．

3.2　モジュライ関手, 関手としてのスタック

ここでは，モジュライ関手として層のモジュライ関手の定義を述べる．

定義 3.6. $X : k$ 上の局所有限型スキームとする．この時，X 上の連接層のモジュライ関手を以下で定める:

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{M}_X : & (\mathrm{Sch}/k)^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & (\mathrm{Sets}) \\ & \Psi & & \Psi \\ & U & \longmapsto & \{E \in \mathrm{QCoh}(X \times_k U) | E : U \text{ 上平坦で局所有限表示される } \}/\text{同型} \end{array}$$

注意 3.7. $E \in \mathcal{M}_X(U)$ ならば，E の各点 $u \in U$ へのファイバーへの制限は X 上の連接層となる．

命題 3.8. $\mathcal{M}_X$ はスキームまたより一般な代数空間によって表現されない．

このようなことが起きる要因としては，$\mathcal{M}_X$ は局所的に同型な連接層を同一視できないことが要因として挙げられる．ここで，例えばベクトル束の場合は張り合わせの同型射までモジュライ関手のの情報に含まればこのようなことから回避できる．従って，モジュライ関手は同型で割らずにかつ層の同型射の情報まで保つものを定義する．

定義 3.9 (関手としての層のモジュライスタック)**.** X は先と同様に定め，X 上の層のモジュライスタック $\mathcal{M}'_X$ を以下の "関手" で定める．

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{M}'_X : & (\mathrm{Sch}/k)^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & (\mathrm{Groupoids}) \\ & \Psi & & \Psi \\ & U & \longmapsto & \{ \text{対象} : E \in \mathrm{QCoh}(X \times_k U), U \text{ 上平坦で局所有限表示される}, \text{射} : \text{層の自己同型射} \} \end{array}$$

注意 3.10. 上の定義で "関手" と書いたのは厳密には関手の定義を満たさずに，2-関手と呼ばれるものの定義を満たすからである．

定義 3.11. $\mathcal{M}'_X$ は対象と射に関して貼りあわせの条件を満たす．

定義 3.12 (関手としてのスタック)**.** $F : (\mathrm{Sch}/k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$ を 2-関手とする．F が対象と射に関して張り合わせの条件を満たす時にスタックという．

注意 3.13. 2-関手の定義はここでは述べない．記述にややスペースをとってしまうのと関手によるスタックの定義は実用上は用いないためである．詳細については，[7] や [2] を参照せよ．

3.3 圏としてのスタック

関手としてのスタックの定義は動機としてはわかりやすいが実用上は扱いずらい．そこで，よりスタックの定義を簡単に書くことができないかという考えが浮かぶ．このような動機からここでは，ファイバー圏 (fibered categories) を用いたスタックの定式化について述べる．

定義 3.14 (スキーム S 上のグルーポイド)**.** S をスキームとする．$p : \mathcal{X} \to \mathrm{Sch/S}$ が S 上のグルーポイドであるとは，以下の条件を満たすことである．(この時，単に $\mathcal{X}$ を S 上のグルーポイドいう．)

1. $\forall f : U \to V \in \mathrm{Mor}(\mathrm{Sch}/S), \forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X})$ が $p(x) = T$ を満たすとする (この時，x は T 上の対象であるという)．この時，$\exists y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X})$ と $\exists \varphi \in \mathrm{Mor}(\mathcal{X})$ であり，$p(y) = U, p(\varphi) = f$ (f^*x で y を表す)．

$$\begin{tikzcd} {}^{\exists}y \arrow[r, dotted, "{}^{\exists}\varphi"] \arrow[d, mapsto] & x \arrow[d, mapsto] \\ V \arrow[r, "f"] & U \end{tikzcd}$$

2. $f : U \to V, g : V \to W$ を S 上のスキームの射，$\varphi : x \to z, \psi : y \to z$ を $\mathcal{X}$ 上の射とし，$p(\varphi) = g \circ f, g(\psi) = g$ とする．この時，$\exists ! \chi : x \to y$ で $\varphi = \psi \circ \chi$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dotted, "\exists ! \chi"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] \arrow[d, mapsto] & y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, mapsto] \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] & z \arrow[d, mapsto] \\ U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & V \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

また，$q : \mathcal{Y} \to \mathrm{Sch}/S$ も S 上のグルーポイドであるとする時，S 上のグルーポイドの射 $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ とは $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への関手で，$q \circ \varphi = p$ を満たすものである．

定義 3.15. $p : \mathcal{X} \to (\mathrm{Sch}/S)$ をスキーム S 上のグルーポイドとする．この時，圏 $\mathcal{X}(U)$ を $\mathcal{X}$ の部分圏で対象は $p(x) = U$ となるもので，射は $p(\varphi) = \mathrm{id}_U$ となるようなものとする．

命題 3.16. S 上のグルーポイドを定めると $(\mathrm{Sch}/S)^{op}$ から (groupoids) への 2-関手が定まる．この対応により 2-関手の圏と S 上のグルーポイドの圏の間には圏同値が定まる．

例 3.17. 関手 $F : (\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Sets})$ は以下の構成により S 上のグルーポイドとみなせる．

対象．(U, x) U は S 上のスキーム．$x \in F(U)$.
射．$f : (U, x) \to (V, y)$．ただし，$f : U \to V$ は S 上のスキームの射で $F(f)(y) = x$ を満たす．

これ以降，この対応により F とこのグルーポイドを同一視する．

例 3.18 (層のモジュライ空間)**.** 定義 3.9 を S 上のグルーポイドとして表すと以下のようになる．

対象．(U, E) U は k 上のスキーム．E は $U \times_k X$ 上の準連接層で U 上平坦かつ局所有限表示を持つもの．
射．$(f, \varphi) : (U, E) \to (V, F)$ $f : U \to V$ は k 上のスキームの射で，$\varphi : E \to f^* F$ は層の同型射．ただし，射の合成を定義する際は，層の射の引き戻し関手間の自然な同型 $(g \circ f)^* \simeq f^* g^*$ を用いる．

定義 3.19 (圏としてのスタック)**.** S 上のグルーポイド $p : \mathcal{X} \to (\mathrm{Sch}/S)$ が S 上のスタックであるとは以下の条件を満たすことである．

$U, U_i \in \mathrm{Sch}/S$, $\{f_i : U_i \to U\}$ を S 上のスキームの射でエタール射の族でありかつ U の被覆となっているものとする．

(単一性)．$x, y \in \mathcal{X}(U)$ で $\varphi, \psi : x \to y \in \mathrm{Mor}(\mathcal{X})$ とする．${f_i}^* \varphi = {f_i}^* \psi$ ならば，$\varphi = \psi$ となる．
(射の張り合わせ)．$x, y \in \mathcal{X}(U)$ で $\varphi_i : {f_i}^* x \to {f_i}^* y \in \mathrm{Mor}(\mathcal{X})$ とする．$\forall i, j$ に対して，$f_{ij}^* \varphi_i = f_{ji}^* \varphi_j$ ならば，$\exists \varphi : x \to y$ で $f_i^* \varphi = \varphi_i$ となる．ただし，$f_{ij} : U_{ij} := U_i \times_U U_j \to U_i$ は f_j の f_i による引き戻し．
(対象の張り合わせ)．$x_i \in \mathcal{X}(U_i)$，$\varphi_{ij} : f_{ij}^* x_i \to f_{ji}^* x_j \in \mathrm{Mor}(\mathcal{X})$ とする．φ_{ij} はコサイクル条件を満たすとする．この時，$x \in \mathcal{X}(U)$ と $\varphi_i : f_i^* x \to x_i \in \mathrm{Mor}(\mathcal{X})$ が存在して，$\varphi_{ij} \circ f_{ij}^* \varphi_i = f_{ji}^* \varphi_j$ を満たす．

注意 3.20. 例 3.17 の F が代数空間の時，対応する S 上のグルーポイドはスタックとなる．また，例 3.18 の S 上のグルーポイドもスタックとなる．

3.4 スタックに関する諸定義

定義 3.21 (S 上のグルーポイドのファイバー積)**.** $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}, \Psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ を S 上のグルーポイドの射とする．p, q, r を $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ の構造射とする．この時，これらのファイバー積 $\mathcal{X} \times_{\Phi,\mathcal{Z},\Psi} \mathcal{Y}$ (Φ, Ψ が明らかな場合は $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y}$ と書く) を以下の S 上のグルーポイドにより定める．

対象. (x, y, φ) ただし $x \in \mathrm{ob}\,\mathcal{X}, y \in \mathrm{ob}\,\mathcal{Y}$ で $p(x) = q(y)$ をみたし，$\varphi : \Phi(x) \to \Psi(y)$ は $\mathcal{Z}$ の射.

射. $(\alpha, \beta) : (x', y', \varphi') \to (x, y, \varphi)$ $\alpha : x' \to x, \beta : y' \to y$ はそれぞれ $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ の射で $\Psi(\alpha) \circ \varphi = \varphi' \circ \Psi(\beta)$ を満たす.

定義 3.22. $\Psi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を S 上のグルーポイドの射とする．Ψ が表現可能であるとは，任意のスキーム U から $\mathcal{Y}$ への射 Ψ に関して．$\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} F$ が代数空間と同型になることである．

定義 3.23. 表現可能な S 上のグルーポイドの射 $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が滑らか (エタール，全射) であるとは，任意のスキームから $\mathcal{Y}$ への射 $\Psi : U \to \mathcal{Y}$ に対して，ファイバー積により得られる射 $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U \to U$ が滑らか (エタール，全射) となることである．

定義 3.24 (Artin, Deligne-Mumford スタック)**.** $\mathcal{X}$ が S 上のスタックであるとする．この時 $\mathcal{X}$ が Artin (Deligne-Mumford) スタックであるとは，以下が成り立つことである．

1. 対角射 $\delta : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が表現可能.
2. スキーム U から $\mathcal{X}$ への全射で滑らか (エタール) な射 $\Phi : U \to \mathcal{X}$ が存在する.

注意 3.25. 上の定義の一つ目の条件から任意のスキームから $\mathcal{X}$ への射が表現可能になるため，U から $\mathcal{X}$ への任意の射は表現可能になる．また，Artin スタックは代数的スタックともいう．

例 3.26 (商スタック)**.** 以降で頻繁に用いられる商スタックの定義を述べる．X を S 上のスキームとして G を S 上の群スキームで X に作用しているとする，この時，この作用に関する商スタック $[X/G]$ を以下の S 上のグルーポイドとして定める．

対象. $(\pi : P \to U, \phi : P \to X)$, U は S 上のスキーム．π は主 G 束であり，ϕ は G 同変射.

射. $(\alpha, f) : (\pi' : Q \to V, \psi : Q \to X) \to (\pi : P \to U, \phi : P \to X)$ $f : V \to U$ は S 上のスキームの射であり，$\alpha : Q \to P$ も S 上のスキームの射で，以下の可換図式を満たす，

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend left, "\psi"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & P \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[r, phantom, bend left=20, "\circlearrowright"] & X \\
V \arrow[r, "f"] & U &
\end{tikzcd}$$

4 導来代数幾何学, 主結果について

以下では k は標数 0 の代数閉体とする．ここから先は，[6], [1] に基づいた主結果の説明を行う．

4.1 基本的な定義

定義 4.1 (次数付き微分代数 (dga)，次数付き微分リー代数 (dgla))**.** R を $\mathbb{Z}$ 次数付き代数とする．このとき，$d : R \to R$ は次数が 1 の次数つき代数の準同型とする．この時，(R, d) が次数付き微分代数 (dga) であるとは，$d(ab) = (da)b + (-1)^{\bar{a}}a(db)$ が成り立つことである．

L を $\mathbb{Z}$ 次数つき k ベクトル空間とする．$[\cdot, \cdot] : L \times L \to L$ を次数 0 の双線型性写像とし，$d : L \to L$ を次数 1 の線型写像とする．この時 $(L, [\cdot, \cdot], d)$ が次数付き微分リー代数であるとは，以下が成り立つことである: (1). $[a, b] + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, a] = 0$, (2). $[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, [a, c]]$, (3). $d([a, b]) = [da, b] + (-1)^{\bar{a}}[a, db]$.

定義 4.2 (dg-スキーム，dg-スタック)**.** X をスキーム (代数的スタック) とする．$\mathcal{R}_X$ を X 上の $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ 次数付き微分代数の層で $\mathcal{R}^0_X = \mathcal{O}_X$．また，$\mathcal{R}^i_X$ が準連接層であるとする．この時，$(X, \mathcal{R}_X)$ を dg-スキーム (スタック) という．

注意 4.3. スタック上の層は本レポートでは定義していなかった．詳しくは [5] を参照せよ．ただ，本レポートでは商スタック上の準連接層しか考えず，商スタック $[X/G]$ 上の準連接層は X 上の準連接層で G 同変なものと 1 対 1 に対応することが知られている．そのため，この事実のみ与えておけば本レポートにおいては十分である．

定義 4.4. $(X, \mathcal{R}_X)$ を dg スキーム (スタック) としたときその下にあるスキーム (スタック) を底空間が $|\operatorname{Spec}(H^0(\mathcal{R}))|$ で構造層が $H^0(\mathcal{R}_X)$ となるスキーム (スタック) とする．これらを $\pi_0(X, \mathcal{R})$ と表すことにして，dg スキーム (スタック)$(X, \mathcal{R}_X)$ を $\pi_0(X, \mathcal{R}_X)$ の導来化と呼ぶことにする．

4.2 フィルター付き加群の導来モジュライスタック

定義 4.5. A を環とする．フィルター付き A 加群とは A 加群 M と M の部分加群のフィルトレーション

$$0 = F_0M \subset F_1M \subset \cdots \subset F_sM = M$$

の組み (M, F_iM) のこととする．また，F_iM が明らかな時は単に M と書くことでフィルター付き加群を表す．さらに (N, F'_iN) もフィルター付き A 加群とした時 (M, F_iM) から (N, F'_iN) への準同型とは M から N への A 加群の準同型でフィルトレーションを保つものとする．さらに，そのようなもの全体を $\operatorname{Hom}_-(M, N)$ で表す. 同様な方法で次数付き環 A に対してフィルター付き次数付き A 加群を定義することができ，M, N が二つのそれとするとき，その間の次数を保つ準同型を $\operatorname{Hom}_{A-\mathrm{gr},-}(M, N)$ で表す.

以下で，次数つき代数や環等は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付きであるとする．

定義 & 命題 4.6. *A は次数付き k 代数で $A_0 = k$ であるとする．$V := \bigoplus_{i=p}^q V_i$ をフィルター付きで次数付き k-ベクトル空間で $[p, q]$ の間にのみ 0 でない斉次な元があるとする (このことを $[p, q]$-次数付きと言う)．このとき，*

$$L^i_- := \operatorname{Hom}_{k-\mathrm{gr},-}(A^{\otimes i} \otimes_k V, V) = \operatorname{Hom}_{k-\mathrm{gr},-}(A^{\otimes i}, \operatorname{End}_-(V, V)).$$

このとき，$L_- := \bigoplus_i L^i_-$ には以下の構成で，次数付き微分リー代数の構造が入る．

- d は環 A の積構造により定まる*:* $d\mu(a_1, \cdots, an + 1) = \sum_{i=i}^n (-1)^{n-i}\mu(\cdots, a_ia_{i+1}, \cdots)$
- $[\cdot, \cdot]$ はベクトル空間の準同型の合成により定める*:* $[\mu, \mu'] = \mu \circ \mu' - (-1)^{mn}\mu' \circ \mu$．ただし，$\mu \circ \mu'(a_1, \cdots, a_{m+n}) := (-1)^{mn}\mu(a_1, \cdots, a_m) \circ \mu'(a_{m+1}, \cdots, a_{m+n})$ とする．

注意 4.7. V には，$G := \mathrm{GL}(V) = \bigoplus_{i=p}^{q} \mathrm{GL}(V_i)$ の V のフィルトレーションを保つ放物部分群 P の共役による作用があるため，これの L_- への作用が存在する．特に，L_-^1 をアフィン空間と見なせば，商スタック $[L_-^1/P]$ が得られる．

定義 4.8. $L_-^1 = \mathrm{Hom}_{kf-\mathrm{gr},-}(A \otimes_k V, V)$ の元 μ に対して，μ がモーラーカルタンエレメントであるとは，

$$d\mu + \frac{1}{2}[\mu, \mu] = 0$$

が成り立つことを言う．さらにこのような元全体を $\mathrm{MC}(L_-)$ と書くことにする．

注意 4.9. モーラーカルタンエレメントがどのような元を表すか考える．今, $\mu \in L_-^1$ に対しては, $\frac{1}{2}[\mu, \mu] = \mu \circ \mu$ が成立するので，μ がモーラーカルタンであるとは,

$$d\mu + \mu \circ \mu = 0$$

と書き直すことができる．これは言い換えると μ が V の上にフィルター付き次数付き A 加群の構造を与えることと同値である．ただし，異なる $\mathrm{MC}(L_-)$ の元が同型な A 加群を定めることがあることに注意せよ．

命題 4.10. $[L_-^1/P]$ の商部分スタック $[\mathrm{MC}(L_-)/P]$ は次元ベクトルが $(0, \cdots, 0, \dim V_p, \cdots, \dim V_q, 0, \cdots)$ となる次数付きフィルター付き A 加群のモジュライスタックとなる．

さらに，我々は L_- が dgla であることを用いて，$[\mathrm{MC}(L_-)/P]$ の導来化を行うことができる．

命題 4.11. ある dg スタックが存在して，その下にあるスタックで $[\mathrm{MC}(L_-)/P]$ となるものが存在する．

証明の概略. ここでは具体的な dg スタックの構成についてここでは述べることにする．

まず，$M := L_-^1$ 上のベクトル束 $\mathcal{L}_-^i := M \times_k L_-^i$ を考えることができることに注意せよ．このとき，$\mathcal{L}_- := \bigoplus \mathcal{L}_-^i$ は M 上の curved dgla と呼ばれるものの層となる．

ここで curved dgla の層とは dgla の層の拡張となるもので，$d \circ d \neq 0$ であるが，$^{\exists} f \in \mathcal{L}_-^2$ が存在して，$d \circ d = [\cdot, f]$ となるものである．f は曲率と呼ばれる．さらに，$Z(f) = \mathrm{MC}(L_-)$ が成立する．ここで $Z(f)$ は f の M での零点. さらに，$\mathcal{R}_M := \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_-)$ は L_- の $d, [\cdot, \cdot]$ と曲率 f から得られる微分により，可換次数付き微分代数 (cdga) の層となる．加えて，$\mathcal{R}_M$ には L_- の P による作用により，P-同変層としての構造が定まる．従って，これにより定まる $[M/P]$ 上の cdga の層を $\mathcal{R}_{[M/P]}$ と書けば，$([M/P], \mathcal{R}_{[M/P]})$ は $[\mathrm{MC}(L_-)/P]$ の導来化となる．

□

いま定義した dg スタック $([M/P], \mathcal{R})$ には接複体というスキームの接空間を拡張した概念を定義することができる．

定義 & 命題 4.12 ([6])**.** 任意の点 $x \in [\mathrm{MC}(L_-)/P]$ とするとき，x における接複体とは，以下で与えられる k-ベクトル空間の $[-1, \infty]$-余複体である．

$$\mathcal{T}_{[M/P],x} := \{\cdots \to 0 \to \mathrm{Lie}(P) \to T_{M.x} \to \mathcal{L}^2|x \to \mathcal{L}^3|_x \to \cdots\}$$

ここで，$\mathrm{Lie}(P) \simeq \mathrm{Hom}_-(V, V), T_{M.x} \simeq \mathrm{Hom}_-(A \otimes V, V)$ となることに注意せよ．また，この複体の微分 d' は $d' = d + [\cdot, x]$ で与えられる．さらに，$H^i(\mathcal{T}_{[M/P],x}) = \mathrm{Ext}_{A-\mathrm{gr},-}^{i+1}(x, x)$ が任意の x について成立する．

注意 4.13. この命題により導来化したフィルター付き次数付き A 加群のモジュライスタックは滑らかになることがわかる．さらに，この導来スタックの切り下げによってフィルター付き次数付き A 加群のモジュライスタックが得られる．すなわち，1 で目的とした対象がここで一つ得られたことがわかる．

4.3 HN-フィルトレーションのモジュライスタックの埋め込み

この節では，HN-フィルトレーションのスタックが前の節で扱ってきたフィルター付き次数付き加群のモジュライスタックに埋め込めることを紹介する．そして，これを用いることで，HN-フィルトレーションのスタックの導来化を構成する．まずは，連接層の安定性と HN-フィルトレーションの定義について述べる．

定理 & 定義 4.14 ([4])**.** X を k 上の射影スキーム *(cf. [3, Chapter 2.4])* とし, $\mathcal{F}$ をその上の連接層とする．このとき，$\mathcal{F}$ が *pure* であるとは，任意の *0* でない部分連接層のサポートの次元が退化しないことをいう．ここで，層 $\mathcal{F}$ のサポートとは $\mathcal{F}_x := \lim_{x \in U} \mathcal{F} \neq 0$ であるような X の点 x 全体のことを言う．また，X 上の *pure* な連接層 $\mathcal{F}$ が豊富な直線束 L について *(*半*)* 安定であるとは, 任意の部分連接層 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ について

$$p(\mathcal{G}, L, t) \quad (\leq) \quad p(\mathcal{F}, L, t) \quad (t \gg 0)$$

が成立することをいう．ここで,

$$\chi(X, \mathcal{F} \otimes L^{\otimes t}) = \sum_{i=0}^{\dim(X)} \frac{\alpha_i}{i!} t^i, \quad p(\mathcal{F}, L, t) := \frac{\chi(X, \mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})}{\alpha_i}$$

とする．さらに任意の *pure* な連接層 $\mathcal{F}$ について，フィルトレーション $0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_s = \mathcal{F}$ で，$\tilde{\mathcal{F}}_i := \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ が L に関する安定性で半安定になりかつ $p_i(t) := p(\tilde{\mathcal{F}}_i),\ L, t) > p(\tilde{\mathcal{F}}_{i+1}, L, t)$ となるようなものがただ一つ存在する．また，このとき，$(p_0(t), \cdots, p_{s-1}(t))$ を $\mathcal{F}$ の *HN-*タイプと言う．

定理 4.15. *[6]* 固定した *HN-*タイプをもつ連接層のモジュライスタック $\mathcal{M}_1$ について，ある次数付き代数 A のある次元ベクトルに関する次数付きフィルター付き加群のモジュライスタック $\mathcal{M}_2$ が存在して，$\mathcal{M}_1$ から $\mathcal{M}_2$ への開埋め込みが存在する．さらに，この開埋め込みの像は安定性の言葉を用いることにより "具体的に" 記述することができる．

定義 4.16. $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ は上記のようにしたとき，$\mathcal{M}_2$ の前の節で構成した導来化 $\tilde{\mathcal{M}}_2$ の $\mathcal{M}_1$ に制限したものを $\mathcal{M}_1$ の導来化と呼ぶ.

以下の定理はこの導来化が適切なものであると言うことを意味している．

定理 4.17 ([6])**.** $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_1$ とし $\mathcal{M}_2$ での対応する点を x とすれば，$H^i(\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{M}}_2, x}) \simeq \mathrm{Ext}_{-}^{i+1}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ が成立する．

参考文献

[1] Kai Behrend, Ionut Ciocan-Fontanine, Junho Hwang, and Michael Rose. The derived moduli space of stable sheaves. *Algebra & Number Theory*, 8(4):781 – 812, 2014.

[2] Tomás L Gómez. Algebraic stacks. *Proceedings Mathematical Sciences*, 111(1):1–31, 2001.

[3] R Hartshorne. Algebraic geometry. *Graduate Texts in Mathematics*, 79, 1977.

[4] Daniel Huybrechts and Manfred Lehn. *The geometry of moduli spaces of sheaves.* Cambridge University Press, 2010.

[5] Géraud Laumon and Laurent Moret-Bailly. *Champs algébriques*, volume 39 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. Springer, Berlin, 2000.

[6] Yuki Mizuno. An explicit construction of derived moduli stacks of harder-narasimhan filtrations, 2021.

[7] The Stacks Project Authors. *Stacks Project.*